# Vektoranalysis

## Stokes‘scher Integralsatz

# Vektoranalysis

## Stokes‘scher Integralsatz

## Inhalt

Übersicht:

- Herleitung Stokes‘scher Integralsatz
- Anwendungsbeispiel Stokes‘scher Integralsatz

# Vektoranalysis

## Stokes'scher Integralsatz

### Ausgangspunkt

Wir betrachten noch einmal die Aussage des Gauß'schen Integralsatzes…

Der Gauß'sche Integralsatz verbindet Volumenintegrale über die *Divergenz* mit Flächenintegralen (Fluss durch Oberfläche).

**„Nice to Have"…**

Gibt es einen Satz, der eine entsprechende Aussage für die *Rotation* eines Vektorfeldes liefert? (z.B. im Hinblick auf die Maxwell-Gleichungen)



Stokes'scher Integralsatz

## Stokes'scher Integralsatz

### Erinnerung: Herleitung beim Gauß'schen Satz

Wie sind wir bei der Herleitung beim Gauß'schen Satz vorgegangen?

Wir haben zunächst einfach den Fluss durch die Oberfläche, also ein Oberflächenintegral, berechnet.

Hierbei trat dann automatisch, ohne dass wir es vorher geahnt haben die Divergenz auf.

### Ausgangspunkt für den Stoke'schen Satz:

Wir betrachten die sogenannte Zirkulation eines Vektorfeldes…

## Stokes‘scher Integralsatz

### Was ist die Zirkulation eines Vektorfeldes?

Aus mathematischer Sicht…

Die Zirkulation ist das Umlaufintegral über einen geschlossenen Weg $\Gamma$ (Schleife) über ein Vektorfeld $\vec{F}$.

Wir summieren also entlang des Weges die Tangential-komponente $F_t$ auf:

$$\text{Zirkulation} = \oint_{\Gamma} F_t \; dx = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx}$$



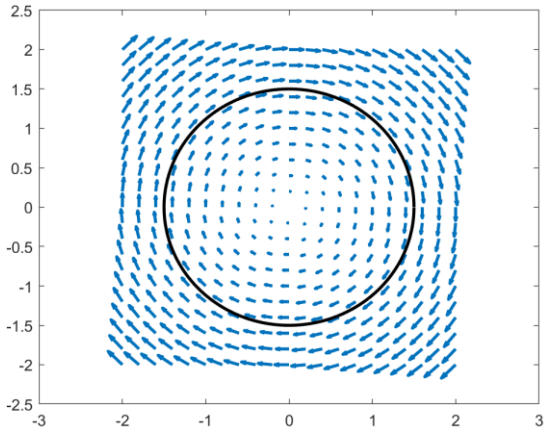
Analog zum Gauß‘schen Satz wird über einen geschlossenen Weg integriert…

# Vektoranalysis

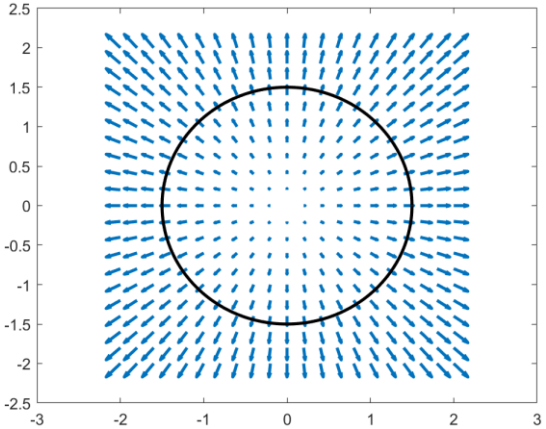
## Stokes'scher Integralsatz

## Was ist die Zirkulation eines Vektorfeldes?

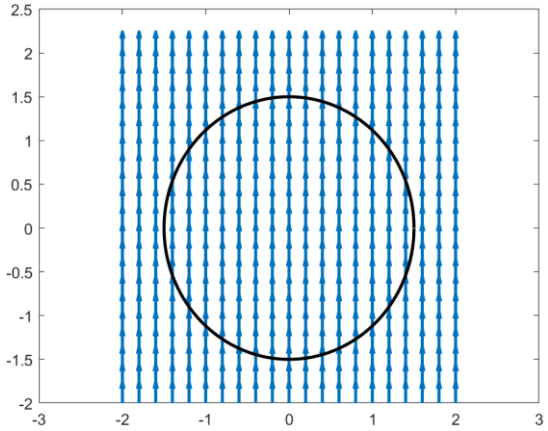
Wir veranschaulichen die Zirkulation an ein paar Beispielen…



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



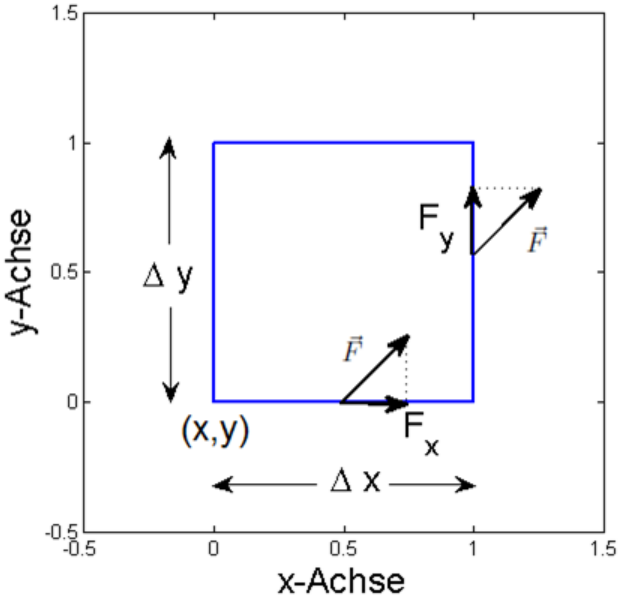
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Vektoranalysis

## Stokes'scher Integralsatz

### Zirkulation am Quadrat

Wir bestimmen zunächst die Zirkulation für ein einfaches Quadrat Q…




$$\oint_{\partial Q} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = ?$$

**Idee:**

Wir approximieren das Integral…

**Übliche Annahme/Vorgehensweise:**

Das Quadrat ist so klein, dass sich das Vektorfeld kaum ändert…

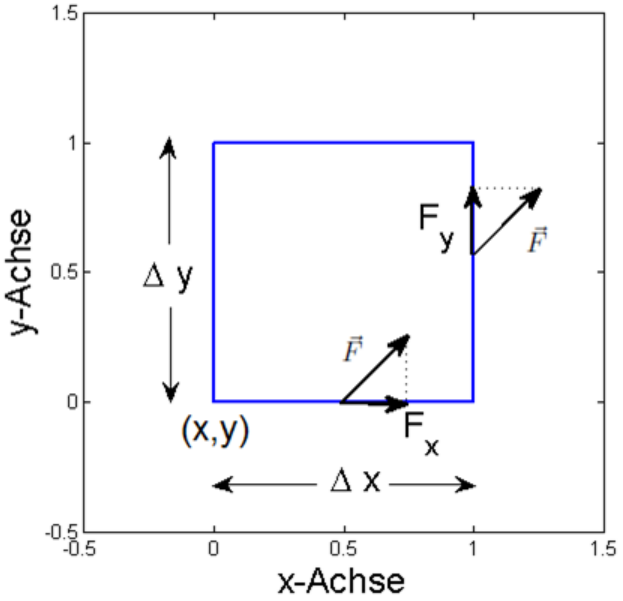
⇒ Linearisierung nach Taylor möglich…

# Vektoranalysis

## Stokes'scher Integralsatz

### Zirkulation am Quadrat

Wir betrachten alle Seiten einzeln…




**Untere Seite:**

Hier entspricht die Tangentialrichtung des Vektorfeldes der x-Komponente…

$$F_t = F_x(x, y)$$

Den Beitrag der unteren Seite erhalten wir dann durch Multiplikation mit der Seitenlänge d.h. $\Delta x$…

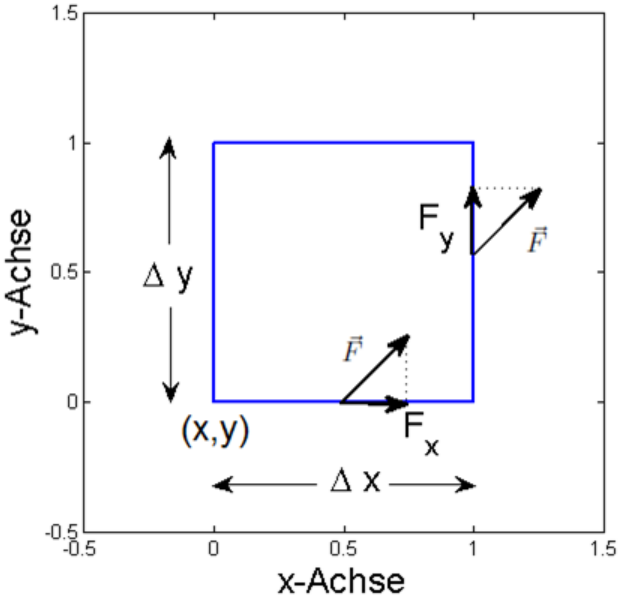
$$F_x(x, y) \cdot \Delta x$$

**Vektoranalysis**

Stokes'scher Integralsatz

**Zirkulation am Quadrat**

Wir betrachten alle Seiten einzeln…




**Rechte Seite:**

Hier entspricht die Tangentialrichtung des Vektorfeldes der y-Komponente…

$$F_t = F_y(x + \Delta x, y)$$

Den Beitrag der unteren Seite erhalten wir dann durch Multiplikation mit der Seitenlänge d.h. $\Delta y$…

$$F_y(x + \Delta x, y) \cdot \Delta y$$

**Linearisierung:**

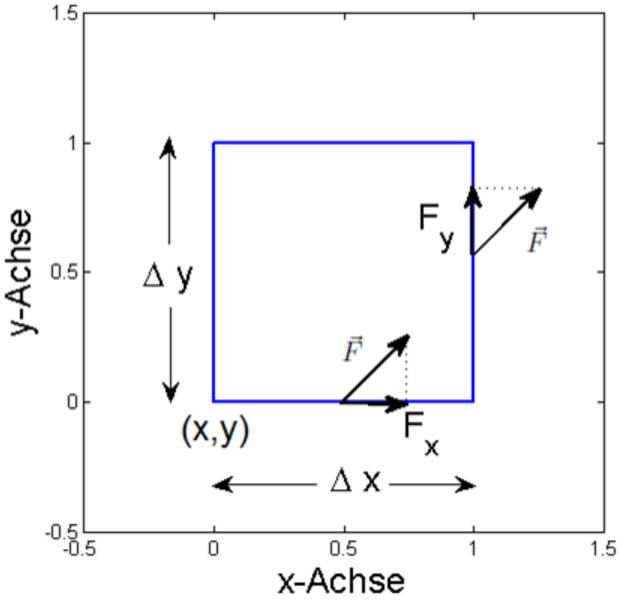
$$\left(F_y(x, y) + \partial_x F_y(x, y) \cdot \Delta x\right) \cdot \Delta y$$

**Vektoranalysis**

Stokes'scher Integralsatz

**Zirkulation am Quadrat**

Wir betrachten alle Seiten einzeln…




**Obere Seite:**

Hier entspricht die Tangentialrichtung des Vektorfeldes der x-Komponente, in negativer Richtung…

$$F_t = -F_x(x, y + \Delta y)$$

Den Beitrag der unteren Seite erhalten wir dann durch Multiplikation mit der Seitenlänge d.h. $\Delta x$…

$$-F_x(x, y + \Delta y) \cdot \Delta x$$

**Linearisierung:**

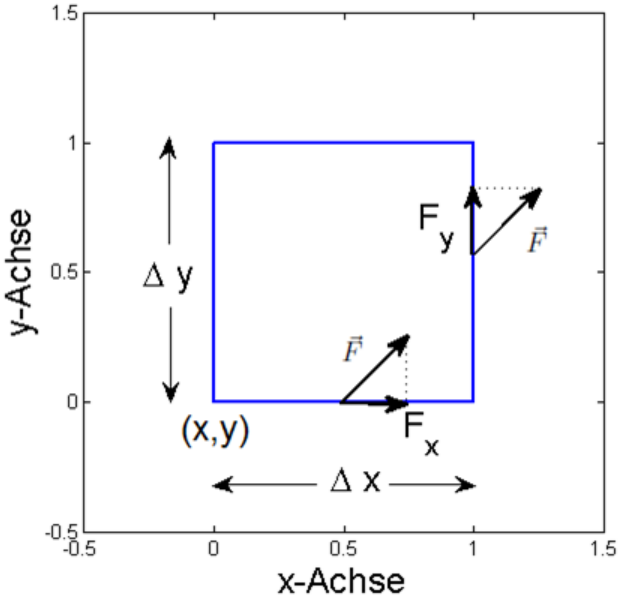
$$-\left(F_x(x, y) + \partial_y F_x(x, y) \cdot \Delta y\right) \cdot \Delta x$$

# Vektoranalysis

## Stokes'scher Integralsatz

### Zirkulation am Quadrat

Wir betrachten alle Seiten einzeln…




### Linke Seite:

Hier entspricht die Tangentialrichtung des Vektorfeldes der y-Komponente, in negativer Richtung…

$$F_t = -F_y(x, y)$$

Den Beitrag der unteren Seite erhalten wir dann durch Multiplikation mit der Seitenlänge d.h. $\Delta y$…

$$-F_y(x, y) \cdot \Delta \mathrm{y}$$

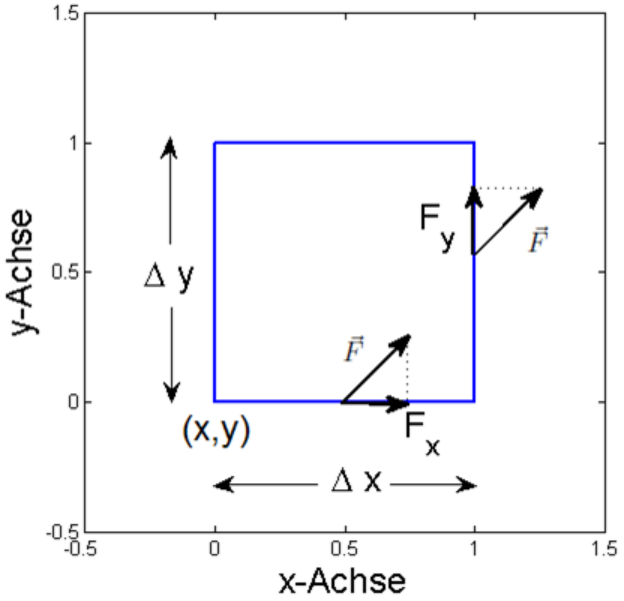
# Vektoranalysis

## Stokes'scher Integralsatz

### Zirkulation am Quadrat

Wir betrachten alle Seiten einzeln…

### Addition aller Beiträge:




unten: $F_x(x,y) \cdot \Delta x$

rechts: $\left(F_y(x,y) + \partial_x F_y(x,y) \cdot \Delta x\right) \cdot \Delta y$

oben: $-\left(F_x(x,y) + \partial_y F_x(x,y) \cdot \Delta y\right) \cdot \Delta x$

links: $-F_y(x,y) \cdot \Delta y$

+

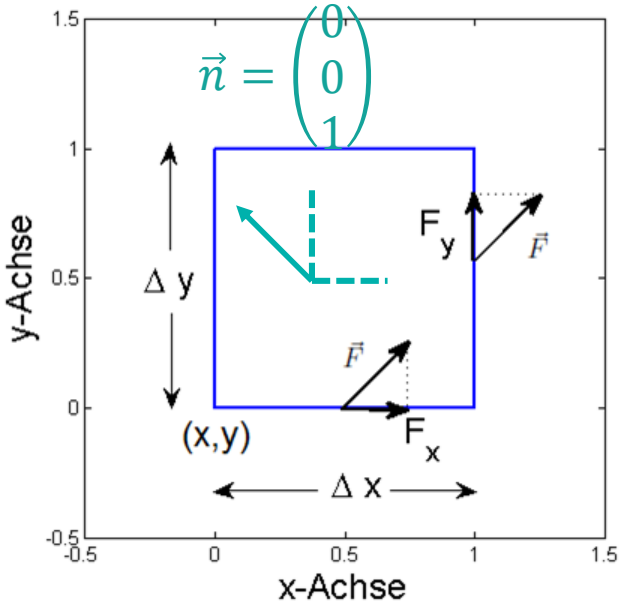
$$\oint_{\partial Q} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \left(\partial_x F_y - \partial_y F_x\right) \Delta x \Delta y$$

# Vektoranalysis

## Stokes'scher Integralsatz

### Zirkulation am Quadrat

Wir schauen uns den hergeleiteten Ausdruck etwas genauer an…




$$\oint_{\partial Q} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \underbrace{\left(\partial_x F_y - \partial_y F_x\right)}_{= \left(\mathrm{rot}\,\vec{F}\right)_z} \underbrace{\Delta x \Delta y}_{= \Delta A}$$

$$\Rightarrow \quad \oint_{\partial Q} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \left(\mathrm{rot}\,\vec{F}\right)_z \cdot \Delta A = \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n} \cdot \Delta A = \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta A}$$

Vektorielles Flächenelement

# Vektoranalysis

## Stokes'scher Integralsatz

### Zirkulation am Quadrat

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse zusammen…

Für ein Quadrat erhalten wir folgende Zirkulation:

$$\oint_{\partial Q} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta A}$$

Wir sehen, dass analog zum Gauß'schen Satz hier die Rotation des Vektorfeldes aufritt.

**Offene Fragen:**

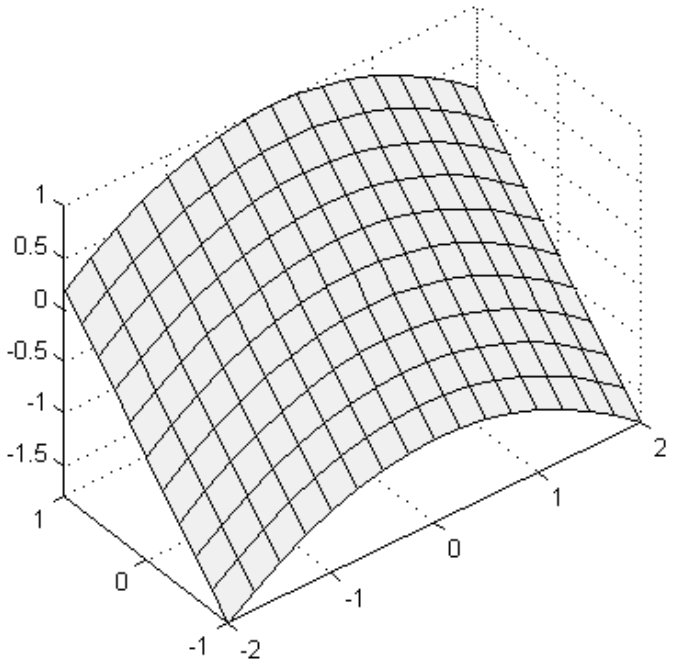
Wie können wir die Zirkulation für beliebige Flächen (im Raum) mit einer beliebigen geschlossenen Randkurve berechnen?

Gilt die Formel in diesem Fall auch bzw. kann sie übertragen werden?

# Vektoranalysis

## Stokes'scher Integralsatz

### Zirkulation für beliebige Situationen...




Wir betrachten eine Schleife (geschlossener Weg), die eine beliebige Fläche A berandet.

Wir unterteilen die Fläche in kleine Quadrate Q.

Die Formel zur Berechnung der Zirkulation für Quadrate kennen wir schon…

$$\oint_{\partial Q} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta A}$$

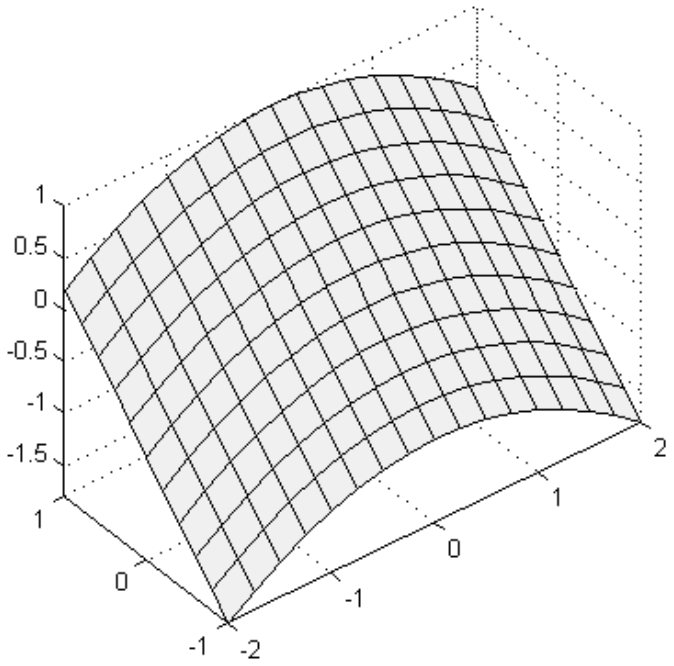
Wir summieren die Zirkulation aller Quadrate und hoffen, dass wir so die Gesamtzirkulation erhalten…

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \sum_{\text{Quadrate}} \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta A}$$

# Vektoranalysis

## Stokes'scher Integralsatz

### Zirkulation für beliebige Situationen…




Für die Zirkulation haben wir folgende Approximation gefunden…

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \sum_{\text{Quadrate}} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta A}$$

Lassen wir die Quadrate immer kleiner werden, so verbessert sich die Approximation. Wir bilden daher den Grenzwert und die Summe geht über in ein Oberflächenintegral…

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \iint_{A} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA}$$

(Stokes'sche Integralsatz)

Fläche $A$ wird berandet durch Kurve $\Gamma$

## Stokes'scher Integralsatz

**Zirkulation für beliebige Situationen…**

Was ist noch offen?

Was ist mit der Zirkulation an den Innenkanten, wo die Quadrate aneinander gelegt werden?

Werden hier die Beiträge nicht doppelt gezählt?

Oder alternativ…

Wenn wir die Zirkulation der Quadrate summieren, wieso gilt dann folgendes?

$$\sum_{\text{Quadrate}} \oint_{\partial Q} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx}$$

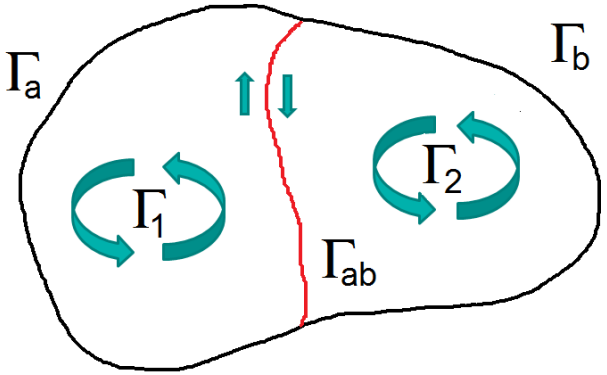
# Vektoranalysis

## Stokes'scher Integralsatz

### Zirkulation für beliebige Situationen...

Wir betrachten die allgemeine Situation in der Skizze...

Die Schleifen $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ besitzen ein gemeinsames Wegstück $\Gamma_{ab}$.




Dieses Wegstück $\Gamma_{ab}$ wird aber entgegengesetzt durchlaufen. Daher hebt sich der Beitrag bei der Summe auf.

**Ergebnis:**

Die Summe der Zirkulationen über $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ entspricht der Zirkulation über die große Schleife $\Gamma$, da sich die Beiträge an dem gemeinsamen Wegstück $\Gamma_{ab}$ gegenseitig aufheben.



Unsere Vorgehensweise funktioniert!

# Vektoranalysis

## Stokes'scher Integralsatz

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \iint_{A} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Wirbelfluss von $\vec{F}$

## Bemerkungen zum Integralsatzes

Der Stokes'sche Integralsatz verbindet Zirkulation mit der Rotation eines Vektorfeldes.

Bei Strömungen wird auch davon gesprochen, dass die Zirkulation entlang der Schleife $\Gamma$ ein Maß für die Wirbelstärke im von $\Gamma$ umschlossenen Gebiet ist.

Oberflächenintegrale geben den Fluss durch eine Oberfläche an. Daher beschreibt die rechte Seite den Fluss des Vektorfeldes $\operatorname{rot} \vec{F}$. Es wird daher auch vom Wirbelfluss gesprochen.

Der Wirbelfluss von $\vec{F}$ durch die Fläche $A$ ist gleich der Zirkulation durch die Randkurve $\Gamma$.

## Stokes'scher Integralsatz

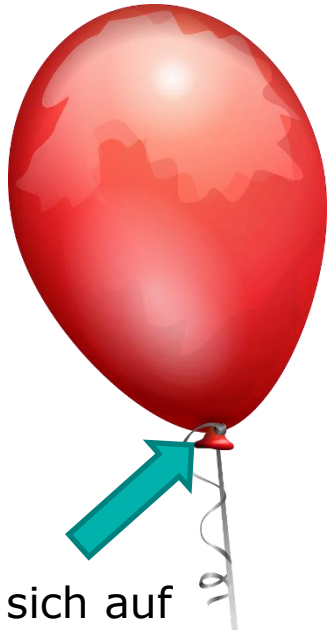
### Bemerkungen zum Integralsatzes

Wir finden speziell für geschlossene Flächen…

Der Wirbelfluss durch eine geschlossene Fläche (d.h. die Oberfläche eines Volumens), verschwindet unabhängig vom Vektorfeld.

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \iint_{A} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA} = 0$$

Bei geschlossenen Flächen existiert keine Randkurve, daher verschwindet die linke Seite…



Randkurve zieht sich auf einen Punkt zusammen

# Vektoranalysis

## Stokes'scher Integralsatz

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \iint_{A} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA}$$

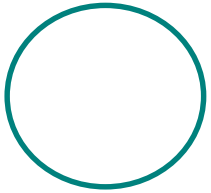
## Bemerkungen zum Integralsatzes

Der Wirbelfluss von $\vec{F}$ hängt nur von der Randkurve $\Gamma$ ab, jedoch nicht von der berandeten Fläche $A$.

Der Grund ist, dass sich die inneren Beiträge gegenseitig aufheben und nur die Beiträge der Randkurve beitragen.

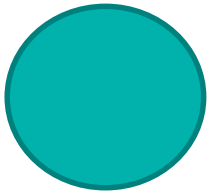
**Beispiel:**

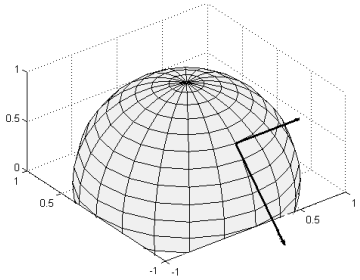
Wir betrachten als Randkurve einen Kreis…



Randkurve $\Gamma$

**Mögliche Flächen A:**



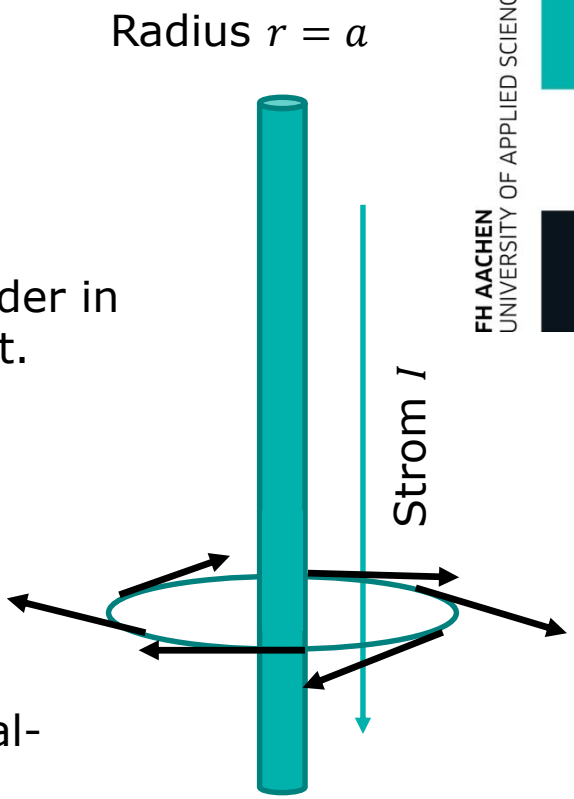




Stokes'scher Integralsatz

## Anwendung: Magnetfeld eines Drahtes

Wir suchen das Magnetfeld eines unendlich langen Leiters, der in $x_3$- Richtung orientiert ist und einen Radius von $r = a$ besitzt.
Der Gesamtstrom, der durch den Leiter fließt sei $I$.




## Vorwissen:

Die Feldlinien bilden konzentrische Kreise um die $x_3$-Achse.

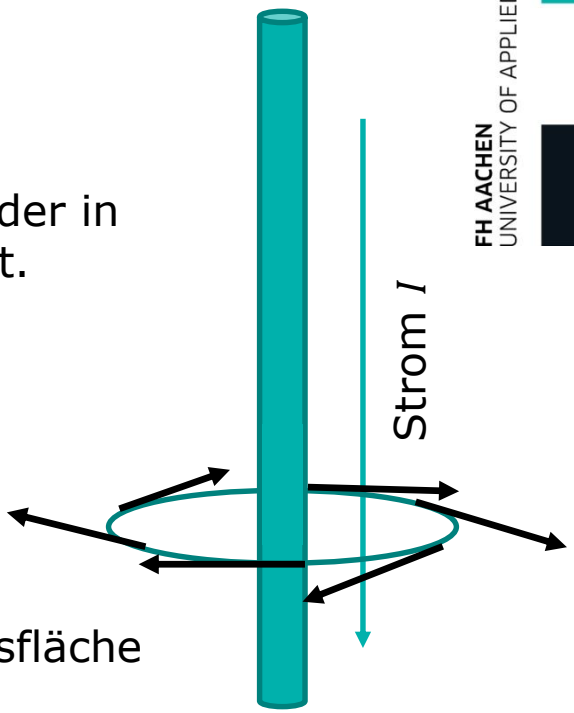
Die magnetische Induktion $\vec{B}$ hat die Richtung der Tangential-vektoren dieser Kreise.

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Stokes'scher Integralsatz

## Anwendung: Magnetfeld eines Drahtes

Wir suchen das Magnetfeld eines unendlich langen Leiters, der in $x_3$- Richtung orientiert ist und einen Radius von $r = a$ besitzt.
Der Gesamtstrom, der durch den Leiter fließt sei $I$.




## Maxwell Gleichungen:

Für stationäre Ströme gilt…

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{x})$$

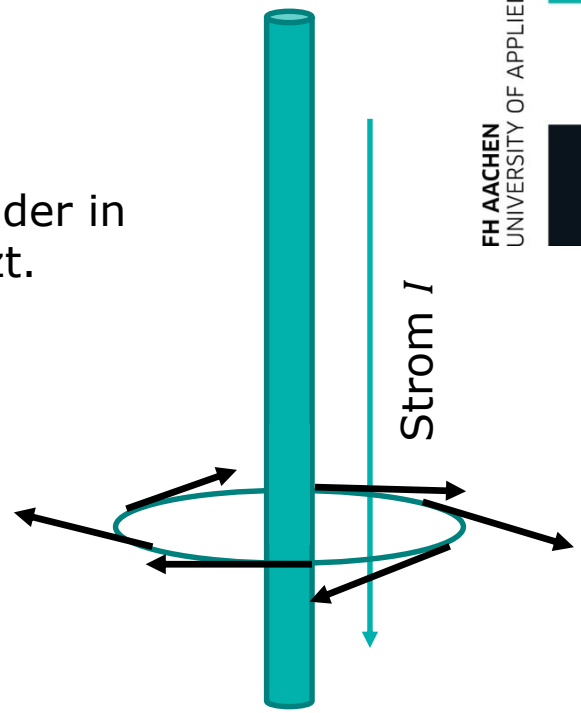
Wir integrieren die Maxwell-Gleichung über eine ebene Kreisfläche parallel zur $x_1 - x_2$-Ebene, mit Radius $\rho > a$ (Außenraum):

$$\Rightarrow \quad \iint_A \operatorname{rot} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = \mu_0 \iint_A \vec{j}(\vec{x}) \cdot \overrightarrow{dA} = \mu_0 I$$

Stokes'scher Integralsatz

## Anwendung: Magnetfeld eines Drahtes

Wir suchen das Magnetfeld eines unendlich langen Leiters, der in $x_3$- Richtung orientiert ist und einen Radius von $r = a$ besitzt.
Der Gesamtstrom, der durch den Leiter fließt sei $I$.




## Anwendung Stokes:

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = \mu_0 \iint_A \vec{j}(\vec{x}) \cdot \overrightarrow{dA} = \mu_0 I$$

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = \oint_{\partial A} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dx} = \int_0^{2\pi} \rho \left|\vec{B}\right| \, d\varphi = 2\pi\rho \left|\vec{B}\right|$$

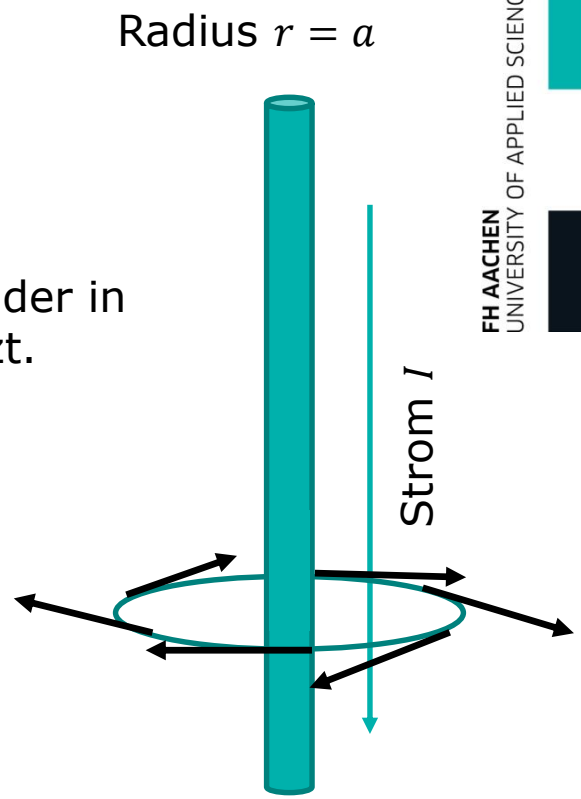
Integration über Kreis mit Radius $\rho$

$\vec{B}$ zeigt in tangentiale Richtung

Stokes'scher Integralsatz

## Anwendung: Magnetfeld eines Drahtes

Wir suchen das Magnetfeld eines unendlich langen Leiters, der in $x_3$- Richtung orientiert ist und einen Radius von $r = a$ besitzt.
Der Gesamtstrom, der durch den Leiter fließt sei $I$.




## Zusammenfassung:

Wir haben…

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = \mu_0 I$$

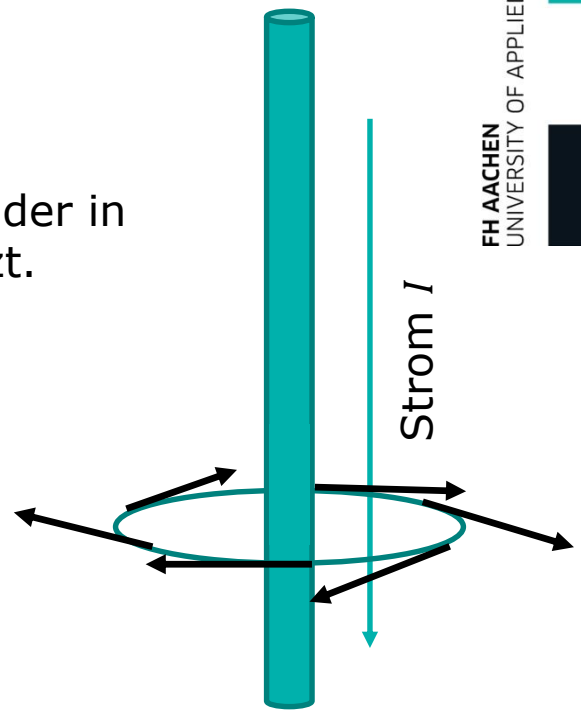
$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = 2\pi\rho \left|\vec{B}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \qquad \rho > a$$

Stokes'scher Integralsatz

## Anwendung: Magnetfeld eines Drahtes

Wir suchen das Magnetfeld eines unendlich langen Leiters, der in $x_3$- Richtung orientiert ist und einen Radius von $r = a$ besitzt.
Der Gesamtstrom, der durch den Leiter fließt sei $I$.




**Hinzufügen der Richtung:**

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \qquad \rho > a$$

Wir nutzen aus, dass $\vec{B}$ tangential zum Kreisrand ist…

Der Vektor $\vec{x}$ ist der Ortsvektor zum betrachteten Punkt…

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}(\vec{e}_3 \times \vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}(\vec{x} \times \vec{e}_3) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}(\vec{x} \times \vec{e}_3)$$

Rechte-Hand-Regel

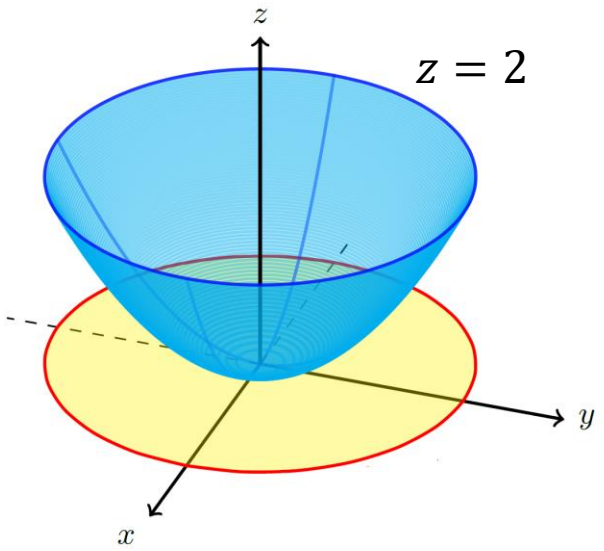
Abstand zur $x_3$ −Achse

## Anwendung: Rechenerleichterung

Gesucht ist folgendes Integral…

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA} = \oint_{\partial A} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx}$$

Vektorfeld: $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix}$




Geometrie: Paraboloid $2z = x^2 + y^2$ mit $0 \leq z \leq 2$

## Stokes'scher Integralsatz:

Kompliziertes Oberflächenintegral wird in ein einfacheres Wegintegral überführt…

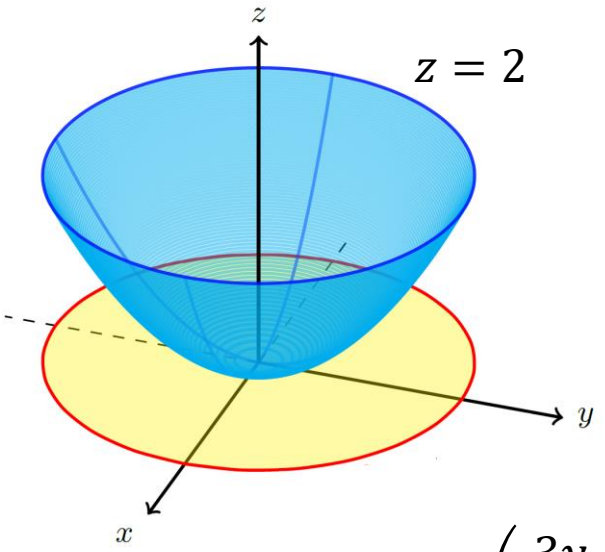
# Vektoranalysis

## Stokes'scher Integralsatz

### Anwendung: Rechenerleichterung

Wir wollen folgendes Integral lösen…

$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx}$$




$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix}$$

### Sie sind an der Reihe...

Wie sieht $\partial A$ aus?

Wie kann $\partial A$ parametrisiert werden?

**Vektoranalysis**

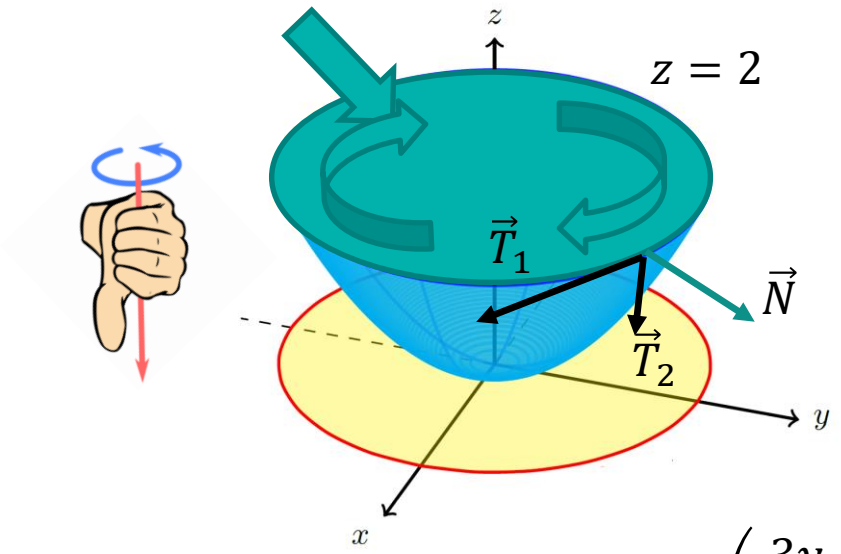
Stokes'scher Integralsatz

**Anwendung: Rechenerleichterung**

Wir wollen folgendes Integral lösen…

$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx}$$

Kreis mit Radius r=2




$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix}$$

**Sie sind an der Reihe…**

Wie sieht $\partial A$ aus? ⇒ $\partial A$ ist ein Kreis mit Radius r=2

Wie kann $\partial A$ parametrisiert werden?

Umlaufsinn, damit Normale nach außen zeigt…

**Parametrisierung:**

$$\vec{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \in [2\pi, 0]$$

**Vektoranalysis**

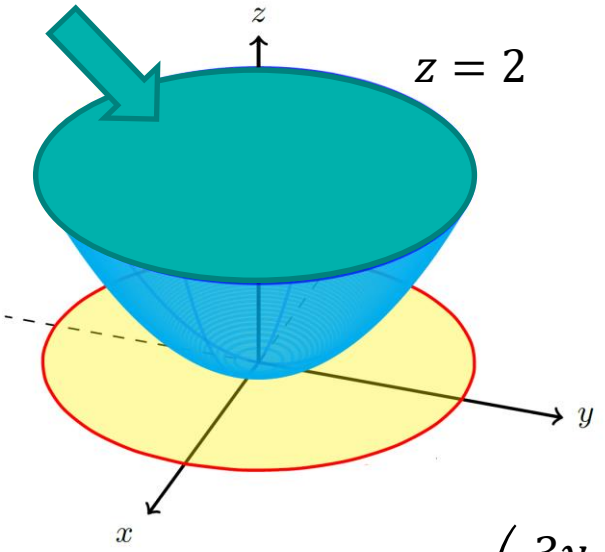
Stokes‘scher Integralsatz

**Anwendung: Rechenerleichterung**

Wir wollen folgendes Integral lösen…

$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx}$$

Kreis mit Radius r=2




$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix}$$

**Sie sind an der Reihe...**

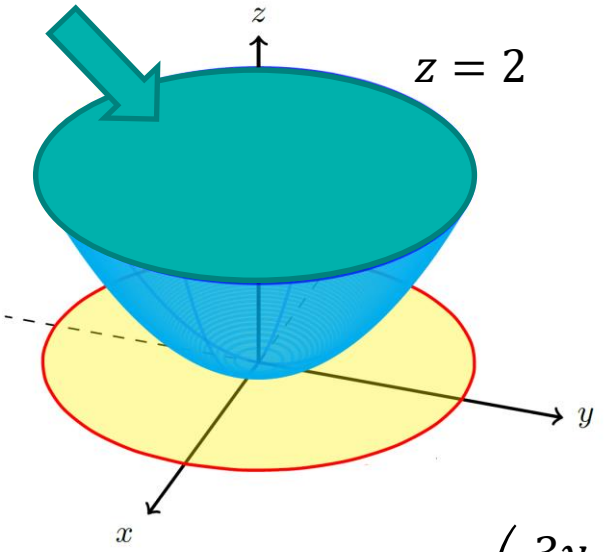
Stellen Sie die Formel zur Berechnung des Wegintegrals auf…

## Anwendung: Rechenerleichterung

Wir wollen folgendes Integral lösen…

$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx}$$

Kreis mit Radius r=2




$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix}$$

## Sie sind an der Reihe...

Stellen Sie die Formel zur Berechnung des Wegintegrals auf…

$$\vec{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{2\pi}^{0} \begin{pmatrix} 6\sin\varphi \\ -4\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \cdot 2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = \int_{2\pi}^{0} -12\sin^2\varphi - 8\cos^2\varphi \, d\varphi$$

$$= \cdots = 20\pi$$